# Inversion
# (Spiegelung am Kreis)

## Ein Spezialthema

Teil 1 Grundlagen

Text Nr. 21400

Stand: 24. Februar 2016



**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

# Vorwort

Die Inversion, die man auch Spiegelung am Kreis nennt, stellt am Gymnasium nur noch ein Wahlthema dar. Der Zeitdruck des G8 und die konsequente Stoffreduzierung verbunden mit der Niveauabsenkung im Abitur, haben dies bewirkt. So ist es auch dem Thema „Affine Abbildungen“ ergangen.

Wer aber mit Abbildungen arbeitet und deren Eigenschaften studiert, etwa dass das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist, der sollte einmal in die Theorie der Inversion hineinschnuppern. Er wird verblüfft feststellen, dass hier das Bild einer Geraden „meistens“ ein Kreis ist. Und überraschenderweise gibt es da einfache Konstruktionen, die auf dem Kathetensatz basieren.

Ich habe viel im Internet recherchiert und mich dort auch bedient. Herausgekommen ist ein hoffentlich gründlicher Kurs, der auch anspruchsvolle Rechnungen anbietet. Ein gutes Thema für Facharbeiten und besondere Gelegenheiten. Für Studenten ein MUSS.

Der Text wird fortgesetzt im Text 54201 „Inversion von Kurven“

Dieser Text wäre ohne ***MatheGrafix*** nicht entstanden. Damit habe ich alle Zeichnungen erstellt.

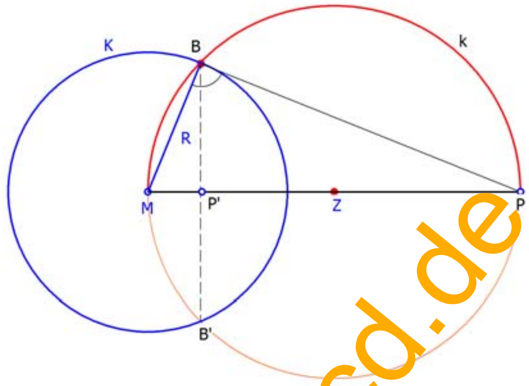
Quellen:
http://www.andreasbaertschi.ch/research/publications/SD-Inversion.pdf
http://www.herder-oberschule.de/madincea/skripten/InversionKreis.pdf



# Inhalt

# Eine „Spiegelung“ am Kreis (Inversion)

## 1 Wiederholung: Kathetensatz




Er bezieht sich auf ein rechtwinkliges Dreieck, wie hier MPB. Darin eingezeichnet ist die Höhe von B auf die Hypotenuse MP. P' ist der Höhenfußpunkt. Er zerteilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte MP' und PP'.

Der Kathetensatz besagt:

Das Quadrat über einer Kathete ist flächengleich dem Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt.

Wählt man die Kathete MB, dann ist der anliegende Hypotenusenabschnitt MP'
und der Kathetensatz lautet dann $\overline{MB}^2 = \overline{MP'} \cdot \overline{MP}$

Wählt man die Kathete BP , dann ist PP' der anliegende Hypotenusenabschnitt
und der Kathetensatz lautet dann $\overline{BP}^2 = \overline{PP'} \cdot \overline{MP}$

Die Abbildung enthält (was für den Kathetensatz nicht benötigt wird) zusätzlich einen Kreis um M durch B. Die Strecke MB ist ein Radius dieses Kreises, und wegen des rechten Winkels bei B liegt die Strecke BP auf einer Kreistangente. Man erkennt auch die dazu symmetrische Tangente durch B'.

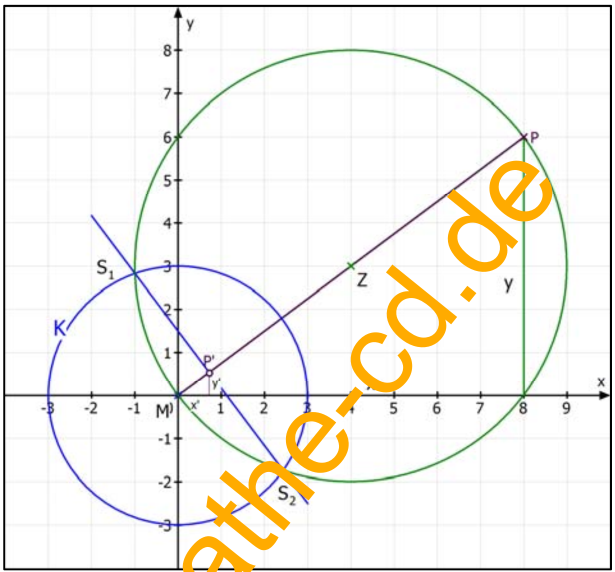
Daher enthält diese Abbildung auch noch die **Kreiskonstruktion einer Tangente** von einem Punkt P aus an den Kreis um M:

Gegeben ist der Kreis K um M und ein Punkt P außerhalb von K.
Gesucht sind die Tangenten von P an K.
Konstruktion:

1. Konstruiere den Mittelpunkt H der Strecke PM.
2. Zeichne um H einen Kreis k durch H (und P).
3. H schneidet K in den beiden Berührpunkten B und B'.
4. Die gesuchten Tangenten sind die Geraden (PB) und (PB').

# 2 Definition der Inversion

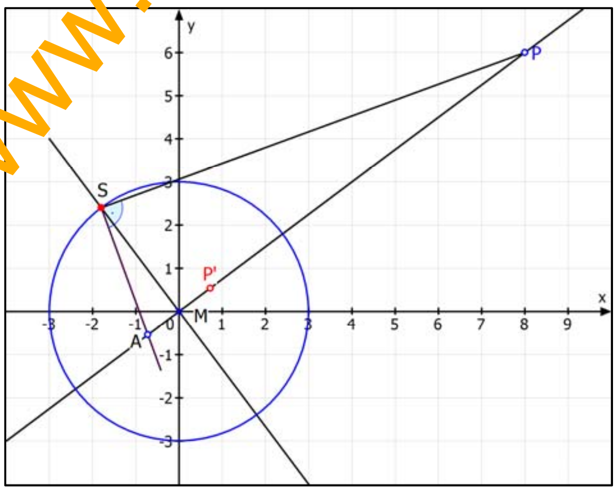
**Gegeben ist der Kreis K um M mit Radius R und ein Punkt P außerhalb dieses Kreises.** Die **Inversion** sei die Abbildung, die dem Punkt P den Punkt P' zuordnet, der bei folgender Konstruktion entsteht.




1. Bestimme den Mittelpunkt Z von MP.
2. Der Kreis um Z durch M bzw. P schneidet K in $S_1$, $S_2$:
3. Die Gerade $S_1S_2$ schneidet MP in P'

Im Grunde handelt es sich um die zuvor geschilderte Tangentenkonstruktion, nur dass man keine Tangenten zeichnet:
**K heißt Inversionskreis**

### Eine zweite Konstruktion geht so:



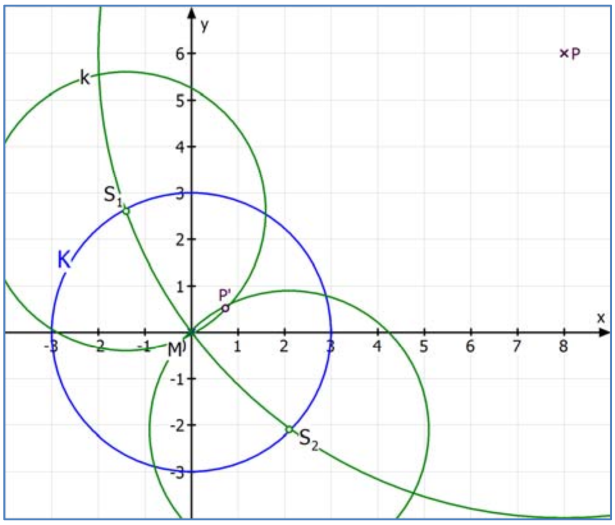

1. Zeichne eine Senkrechte zu MP in M. Diese schneidet K in S.
2. Zeichne eine Senkrechte zu PS in S. Diese schneidet die Gerade PM in A.
3. Spiegle A an M, ergibt P'.

Beweis, dass P' der Bildpunkt zu P ist:
Der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck APS lautet:

$$\overline{MS}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MP}$$

d. h. $R^2 = \overline{MP'} \cdot \overline{MP}$

### Dritte Konstruktion (nur mit Zirkeln).




Zeichne den Inversionskreis K und dann um das Urbild P einen Kreis k durch den Mittelpunkt M des Inversionskreises K. Man erhält die Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$.
Um diese beiden Punkte zeichnet man je einen Kreis durch M. Diese Kreise schneiden sich noch einmal im gesuchten Bildpunkt P'.

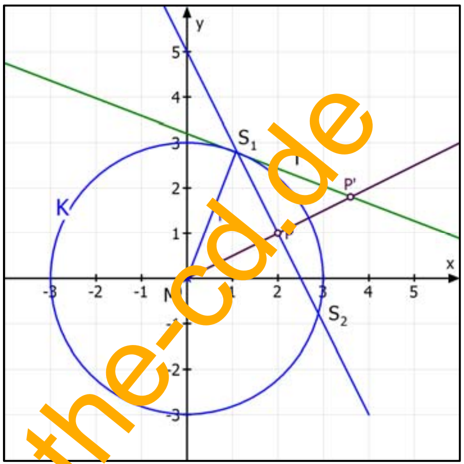
Der aufmerksame Beobachter wird feststellen, dass man hiermit nur Bildpunkte konstruieren kann, deren Urbild außerhalb des Inversionskreises liegt.

**Wie konstruiert man einen Bildpunkt, wenn das Urbild P im Inversionskreis liegt?**

## Konstruktion wenn das Urbild im Kreis liegt:

Jetzt geht man umgekehrt vor wie bei der ersten Konstruktion auf Seite 4:

1. Zeichne eine Senkrechte zur Geraden (MP) durch P.
2. Diese schneidet den Inversionskreis K in $S_1$ (und $S_2$).
3. Die Senkrechte auf $MS_1$ (= Tangente in $S_1$) schneidet die Gerade (MP) in $P'$.




Diese Konstruktion macht sofort klar, dass die Inversion ihre eigene **Umkehrabbildung** ist: Spiegelt man P an K, erhält man $P'$. Spiegelt man dann $P'$ an K, erhält man wieder P.

Das wird übrigens auch durch die Bedingungsgleichung klar. Es gilt ja $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = R^2$

Die Punkte M, P und $P'$ liegen stets auf einer Geraden. Und wenn man P kennt, kann man aus der Gleichung $\overline{MP'} = \frac{R^2}{\overline{MP}}$ berechnen und dann abtragen. Umgekehrt kann man aus dem Bildpunkt $P'$ die Lage von P berechnen, denn es ist $\overline{MP} = \frac{R^2}{\overline{MP'}}$.

**Es gibt zwei Fälle, die bisher noch nicht erfasst sind:**

(1) P liege auf dem Inversionskreis, dann ist $\overline{MP} = R$. Dann folgt: $\overline{MP'} = \frac{R^2}{\overline{MP}} = \frac{R^2}{R} = R$.
Also liegt $P'$ auch auf dem Inversionskreis und fällt daher mit P zusammen.

**MERKE:** **Punkte des Inversionskreises sind Fixpunkte der Inversion.**

(2) Wie sieht es nun mit dem Ursprung (gemeint ist natürlich der Mittelpunkt M des Inversionskreises) als Urbild oder Bild aus?

Für ihn ist ja $\overline{MP} = \overline{MM} = 0$. Dann folgt $\overline{MP'} = \frac{R^2}{\overline{MP}} = \cancel{\frac{R^2}{0}}$. Also gibt es keinen Bildpunkt.

Und wenn man P gegen M rücken lässt, dann ist $\overline{MP}$ zwar noch nicht 0, geht aber gegen 0.
Und dann folgt $\overline{MP'} = \frac{R^2}{\overline{MP}} \to \infty$.

Der Inversionsmittelpunkt wird also ins Unendliche abgebildet. Die Mathematiker sprechen hier dann vom Unendlichen Punkt als Bild des Ursprungs bzw. umgekehrt, der „unendliche Punkt" wird in den Ursprung abgebildet.

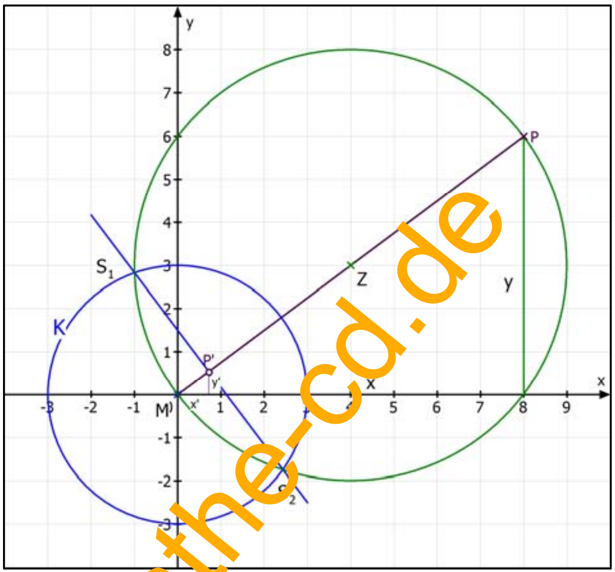
# 3 Abbildungsgleichungen

**Berechnungsformel für den Bildpunkt:**

$$x' = \frac{R^2}{x^2+y^2}\cdot x\,; \qquad y' = \frac{R^2}{x^2+y^2}\cdot y$$

Oder in Vektorform

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{R^2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$




***Beweis:***

Zunächst einmal gilt nach dem **2. Strahlensatz** $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$ (1)

Dann benötigen wir den **Kathetensatz** im Dreieck $MS_1P$: $\overline{MP'}\cdot\overline{MP} = \overline{MS_1}^2$ (2)

Dabei gilt: $\overline{MP} = \sqrt{x^2+y^2}$ (3)

und $\overline{MP'} = \sqrt{x'^2+y'^2}$ (4)

Aus (1) erhält man $y' = \frac{y}{x}\cdot x'$, in (4):

$$\overline{MP'} = \sqrt{x'^2 + \frac{y^2}{x^2}x'^2} = \sqrt{x'^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} = \sqrt{x'^2\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x'}{x}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

Ferner ist $\overline{MS_1} = R$

Nun wird alles in (2) eingesetzt: $\frac{x'}{x}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = R^2$

d. h. $\frac{x'}{x} = \frac{R^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \boxed{x' = \frac{R^2}{x^2+y^2}\cdot x}$

Man setzt das Ergebnis in (1) ein: $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \Rightarrow y' = \frac{x'}{x}\cdot y \Rightarrow \boxed{y' = \frac{R^2}{x^2+y^2}y}$